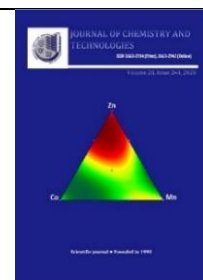




## Journal of Chemistry and Technologies

pISSN 2663-2934 (Print), ISSN 2663-2942 (Online)

journal homepage: <http://chemistry.dnu.dp.ua>



UDC 66.047

### MATHEMATICAL INTERPRETATION OF DYNAMICS OF TEMPERATURE CHANGE DURING DRYING OF HOT MONODISPERSE LAYER OF ORGANIC RAW MATERIALS

Iryna O. Huzova, Volodymyr M. Atamanyuk

Lviv Polytechnic National University, Bandera str., 12, Lviv, 79013, Ukraine

Received 10 October 2020; accepted 15 December 2020; available online 9 January 2021

#### Abstract

This work is devoted to the study of the heat exchange process of drying and its mathematical interpretation, which is important both from the point of view of the theory of drying and its practical implementation. In this work, the drying process of hot candied fruit in a monodisperse layer was investigated. A technique for studying the filtration drying of a thermal agent through a hot monodisperse layer of rectangular particles was developed. The results of the dependence of the change in the temperature of the thermal agent over time and along the height of the candied fruit layer were obtained. The mechanism of heat and mass transfer in a hot monodisperse layer of rectangular particles was substantiated. It is proved that when drying in a stationary layer, there is simultaneously a dry layer of material with the temperature of a thermal agent, which accumulates thermal energy and a wet layer of material with a lower temperature value. The solution of the mathematical problem of temperature distribution along the height of a monodisperse layer is given. This allows you to: determine the temperature of thermal agent by height and time. There is an established mathematical model of the heat transfer process during drying based on the above solution. The basis of this solution: a heat source is evenly distributed in the material layer. The mathematical description of the temperature field in the layer is in dimensionless criteria and is an exponential dependence. The experimental results and calculation results are shown in the graphs. The calculation model is adequate, the error between the experimental and theoretical data does not exceed 7%. The adequacy of the model is established for small values of dimensionless heights. Good agreement between the calculated and experimental results allows us to determine the temperature distribution along the height of the monodispersed layer, using various ratios. This is important for predicting the drying process and for calculating new energy-saving drying technologies.

*Keywords:* drying; mathematical model of heat transfer; thermal energy; monodisperse layer.

### МАТЕМАТИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДИНАМІКИ ЗМІНИ ТЕМПЕРАТУР ПІД ЧАС СУШІННЯ ГАРЯЧОГО МОНОДИСПЕРСНОГО ШАРУ РОСЛИННОЇ СИРОВИНИ

Ірина О. Гузьова, Володимир М. Атаманюк

Національний університет «Львівська політехніка», вул. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна  
Анотація

Дана робота присвячена дослідженню теплообмінного процесу під час сушіння та його математичному опису, що є важливим завданням як теорії сушіння, так і його практичної реалізації. Досліджується процес сушіння гарячих цукатів у монодисперсному шарі. Наведено методику дослідження сушіння шляхом профільовування теплового агента крізь гарячий монодисперсний шар частинок прямокутної форми. Отримані залежності зміни температури теплового агента в часі за висотою шару цукатів. Обґрунтовано механізм процесу тепломасообміну в гарячому монодисперсному шарі частинок з формою прямокутного паралелепіпеду. Доведено, що під час сушіння в стаціонарному шарі одночасно існує сухий шар матеріалу з температурою теплового агента, який акумулює теплову енергію і вологий шар матеріалу з нижчою температурою. Наведено розв'язок математичної задачі розподілу температур за висотою монодисперсного шару, яке дозволяє визначити температуру теплоносія за висотою та у часі. На основі наведеного розв'язку створена математична модель теплообмінного процесу під час сушіння за умови рівномірного розподілу теплоти в шарі матеріалу. Математичний опис температурного поля у шарі представлений в безрозмірній формі експоненційної залежності. Графічно співставленні експериментальні результати та результати розрахунків безрозмірної температури за висотою шару. Результати узагальнення вказують на адекватність розрахункової моделі, чия похибка відносно експериментальних даних не перевищує 7%. Адекватність запропонованої моделі встановлена для малих значень безрозмірних висот. Збіжність розрахункових і експериментальних результатів дозволяє визначити розподіл температур за висотою гарячого монодисперсного шару прямокутних паралелепіпедів, що є важливим для прогнозування перебігу процесу сушіння в процесі розроблення нових енергоощадних технологій сушіння.

*Ключові слова:* сушіння; математична модель теплообміну; тепла енергія; монодисперсний шар.

\*Corresponding author:

© 2020 Oles Honchar Dnipro National University

doi: 10.15421/082030

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР ВО ВРЕМЯ СУШКИ ГОРЯЧЕГО МОНОДИСПЕРСНОГО СЛОЯ РАСТИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ

Ирина А. Гузёва, Владимир М. Атаманюк

Национальный университет «Львівська політехніка», ул. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

### Аннотация

Данная работа посвящена исследованию теплообменного процесса сушки и его математической интерпретации, что важно как с точки зрения теории сушки, так и её практической реализации. Исследован процесс сушки горячих цукатов в монодисперсном слое. Разработана методика фильтрационной сушки теплового агента через горячий монодисперсный слой частиц с формой прямоугольного параллелепипеда. Получены результаты зависимости изменения температуры теплового агента от времени и по высоте слоя цукатов. Обоснован механизм теплопереноса в горячем монодисперсном слое частиц прямоугольной формы. Доказано, что при сушке в стационарном слое одновременно существует сухой слой материала с температурой теплового агента, который аккумулирует тепловую энергию и влажный слой материала с меньшим значением температуры. Дано решение математической задачи распределения температуры по высоте монодисперсного слоя. Это позволяет определять температуру термического агента по высоте и времени. На основе вышеуказанного решения создана математическая модель процесса теплопередачи при сушке, где источник тепла равномерно распределен в слое материала. Математическое описание температурного поля в слое представлено экспоненциальной зависимостью в безразмерных критериях. Графически сопоставлены результаты экспериментов и расчетов. Расчетная модель адекватна, ее погрешность относительно экспериментальных данных не превышает 7%. Адекватность модели установлена для малых значений безразмерных высот. Хорошее совпадение между расчетными и экспериментальными результатами позволяет определить распределение температуры по высоте монодисперсного слоя, что важно для прогнозирования процесса сушки и для расчета новых энергосберегающих технологий сушки.

*Ключевые слова:* сушка; математическая модель теплообмена; тепловая энергия; монодисперсных слой.

### Вступ

Розроблення математичних моделей в науковій літературі широко представлено на прикладах процесів сорбції, десорбції [1] та енерготехнологічних процесів [2–3]. Дослідження теплообмінного процесу під час сушіння та його математичний опис є важливим завданням як теорії сушіння, так і його практичної реалізації. У статті розглядається метод фільтраційного сушіння монодисперсного шару рослинної сировини. Такий метод полягає у профільтовуванні теплового агенту у напрямку «дисперсний шар – перфорована перегородка». Фільтраційним методом можна сушити широкий діапазон полідисперсних матеріалів як неорганічного, так і органічного походження. Під час сушіння тепло, яке вносить в шар тепловий агент, йде на нагрівання вологих частинок і на випаровування вологи.

Проте є ряд матеріалів, які поступають на сушіння з температурою, приблизно рівною температурі теплового агента. Такі матеріали вносять в сушарку додаткову кількість теплової енергії, і тепло теплового агента при цьому майже повністю витрачається на випаровування вологи. Це є позитивним моментом з точки зору економії енергії та зменшення часу сушіння.

Так, наприклад, гарячими на сушіння потрапляють цукати після процесу насичення

[4]. Цукати, які надходять на сушіння, являють собою гарячий монодисперсний шар частинок прямокутної форми. Сушіння цукатів, як і більшості органічної сировини, відбувається в другому періоді [4–8]. Точне розв'язання задачі теплообміну під час фільтрування теплового агенту крізь гарячий монодисперсний шар частинок прямокутної форми, який сушиться в другому періоді, є надзвичайно складною задачею. Тому теоретичні та експериментальні дослідження процесів теплообміну в вказаній системі під час другого періоду фільтраційного сушіння та їх математична інтерпретація є актуальною задачею.

У науковій літературі розроблені математичні моделі, які дозволяють врахувати вплив параметрів теплового агенту [9–12], вплив природи речовин [13–14], їх форми та дисперсного складу [15–16] на теплообмінний процес під час сушіння. Так, наприклад, запропоновані та перевірені на адекватність математичні моделі, які дозволяють враховувати вплив параметрів теплового агенту на процес фільтраційного сушіння бавовни [17], шпону [18], зерна [19; 20], подрібнених стебел соняшника [21], дрібнодисперсної фракції кам'яного вугілля, піску, торфу, суперфосфату, поліакриламиду [22]. Усі перелічені матеріали є полідисперсними, з частинками сферичної

форми, які надходять на сушіння з температурою навколишнього середовища.

Саме тому метою даної публікації є розроблення математичної моделі теплообмінного процесу в гарячому монодисперсному шарі частинок з формою прямокутного паралелепіпеда під час другого періоду фільтраційного сушіння.

### Експериментальна частина

Об'єктом дослідження є плоди гарбуза, очищені від шкірки та насіння та сформовані у вигляді частинок у формі прямокутного паралелепіпеда розміром 20x10x10 мм. Для насичення плодів сахарозою використовувався цукровий сироп 70 % (мас.) із температурою 80 °С.

Виготовлення цукатів здійснювали за наступною методикою: сформовані частинки бланшували (обробка гострою парою) 10 хвилин, витримували в цукровому сиропі (за умови перемішування) 3 години. Відношення маси гарбуза до маси сиропу становила 1 : 5.

Після 3-х годин витримки сироп зливали, і готові цукати з температурою 80 °С направляли на сушіння [1]. Тепловим агентом було повітря з температурою 100 °С. Процес сушіння цукатів здійснювали фільтраційним методом у контейнері, схема якого зображена на рис. 1. Особливістю такого сушіння є те, що сировина подається на сушіння з температурою 80 °С, тобто вносить у контейнер для сушіння додаткову кількість теплової енергії.

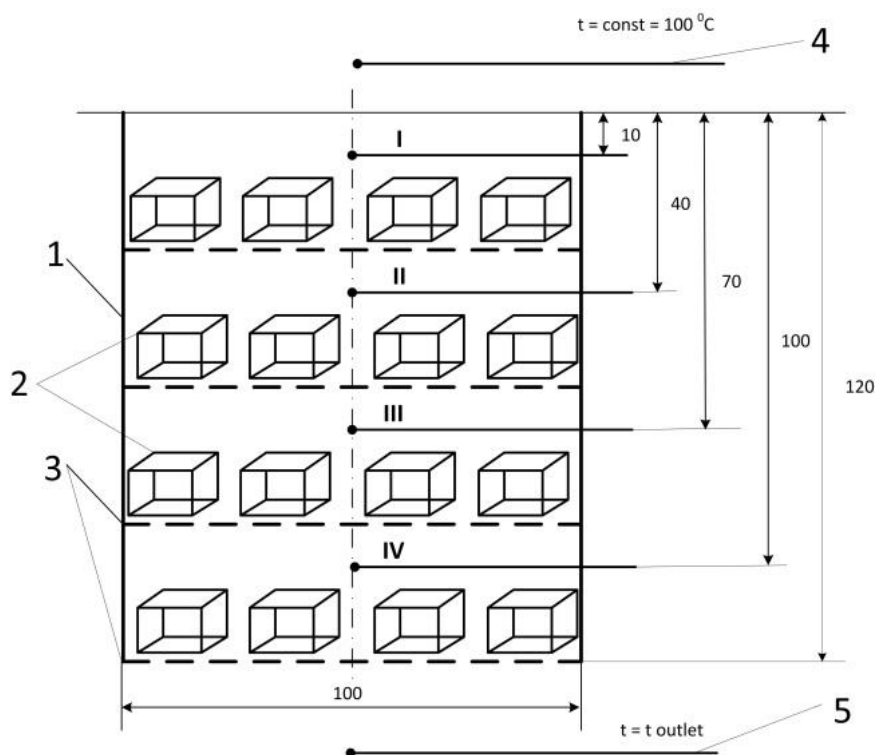


Fig. 1 Scheme of a container for filtration drying of candied fruits:

1 – body, 2 – candied fruits layers, 3 – grates, 4 – thermocouple at the container inlet, 5 – thermocouple at the container outlet; I – thermocouple above first layer of candied fruits, II – thermocouple above second layer of candied fruits, III – thermocouple above third layer of candied fruits, IV – thermocouple above fourth layer of candied fruits.

Рис. 1. Схема контейнера для фільтраційного сушіння цукатів

1 – корпус, 2 – шари цукатів, 3 – решітки, 4 – термопара на вході в контейнер, 5 – термопара на виході з контейнера; I – термопара над першим шаром цукатів, II – термопара над другим шаром цукатів, III – термопара над третім шаром цукатів, IV – термопара над четвертим шаром цукатів.

Корпус контейнера 1 (рис. 1) діаметром 0.1 м складається з чотирьох частин, які мають решітки 3. Стінки контейнера та решітки виготовлені зі фторопласту з метою виключення кондуктивного нагрівання цукатів під час сушіння та збереження смакових якостей та поживної цінності готової

продукції. На вході та на виході з контейнера 1 під'єднані термопари 4 та 5 відповідно. Також до кожної з чотирьох частин контейнера 1 під'єднані термопари I – IV.

Підготовку до експерименту проводили наступним чином: на кожну з чотирьох решіток 3 цукати розклали по 16 штук

рівномірно в один шар. Такий метод розміщення цукатів сприяє рівномірному розподіленню теплового агента та мінімізує гідравлічний опір шару. На кожний шар встановлювали термопари, котрі були розміщені від верхнього краю контейнера наступним чином: термопара I – 10 мм, термопара II – 40 мм, термопара III – 70 мм, термопара IV – 100 мм (рис. 1). Термопара 4 на вході до контейнера фіксувала сталу температуру теплового агента. Термопара 5 внизу контейнера фіксувала температуру теплового агента на виході з контейнера.

Температури по всій висоті шару, а також на вході та на виході фіксували восьмиканальним термоелектричним перетворювачем ПТ-108, який виводить виміряні значення на персональний комп'ютер через 1.8 с. Зміну ваги контейнера з цукатами під час фільтраційного сушіння фіксували за допомогою електронних вагів AXIS-3000 з точністю до 0.01 г.

### Результати та їх обговорення

Залежності зміни температури теплового агента в часі за різної висоти шару цукатів наведені на рис. 2.

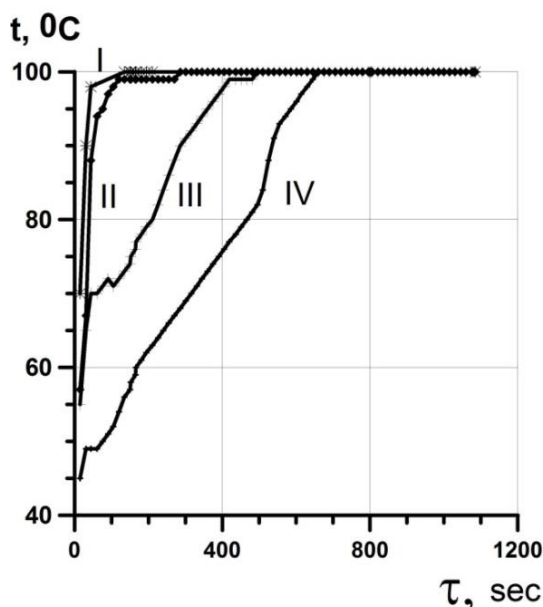


Fig. 2. Temperature dependence of the heat agent during filtration drying on time along different heights of the candied fruits layer: I – 10 mm, II – 40 mm, III – 70 mm, IV – 100 mm.

Рис. 2. Зміна температури теплового агента в часі по висоті шару цукатів з гарбуза.  
I – 10 мм, II – 40 мм, III – 70 мм, IV – 100 мм.

Розглянемо верхній шар (рис. 2, крива I). У початковий момент часу (15 с) тепловий агент, профільтровуючись крізь шар сировини, повністю насичується вологою. Відповідно

зростають його відносна вологість і вологовміст, а температура падає до температури «мокрого» термометру (70 °С). Тобто відбувається повне насичення теплового агента вологою.

Далі верхній шар контактує зі свіжим тепловим агентом, який буде насичуватися частково, тобто його відносна вологість буде зростати до значень, менших за 100%. Температура теплового агента при цьому буде зменшуватися до значень, більших за температуру «мокрого» термометра. Як видно з рис. 2 (криві I), через 30 с температура теплового агента в верхньому шарі становитиме 90 °С, через 45 с – 98 °С. Через 120 с температура в шарі становить 100 °С, тобто дорівнює температурі теплового агента на вході. Отже, протягом подальшого сушіння цей шар участі в тепломасообміні не приймає. Другий шар (рис. 2, крива II) у цей момент часу починає висихати за умови повного насичення. Через 270 с другий шар припиняє участь у тепломасообміні. Аналогічно відбувається сушіння і в нижніх шарах (рис. 2, криві III – IV). Припиняє участь в тепломасообміні третій шар – через 490 с, четвертий шар – через 760 с.

Розглянемо механізм запропонованого методу сушіння, при якому в контейнер потрапляє додаткова кількість теплової енергії, яка міститься у монодисперсному шарі температурою 80 °С.

Внаслідок перепаду тисків волога із цукатів випаровуватиметься і відводиться тепловим агентом. Під час цього відбуватиметься складний тепломасообмінний процес. Внаслідок випаровування вологи частинки будуть охолоджуватися і одночасно догріватися тепловим агентом. Тобто температура першого шару в напрямку руху теплового агента підтримуватиметься постійною і становитиме 100 °С.

У подальшому тепло- і масообмін відбуватиметься лише за рахунок охолодження вологих частинок нижніх шарів. Внаслідок охолодження теплового агента та насичення його парами вологи інтенсивність випаровування поступово зменшується в напрямку руху теплового агента до повного його насичення вологою, а зона масообміну буде розширюватись. Після повного насичення теплового агента вологою, яке відповідатиме його температурі на певній висоті  $z'$ , він, фільтруючись крізь гарячий вологий шар внаслідок теплообміну,

нагріватиметься і відповідно донаситиметься парами води. На виході із шару вологовміст теплового агента визначатиметься його температурою.

З плином часу зона масообміну буде переміщатися в напрямку руху теплового агента до нижнього шару. Одночасно у верхніх шарах, які першими контактують із тепловим агентом, формується температурний фронт частинок, нагрітих до 100 °С, і цей фронт також буде розширяться в напрямку руху теплового агента. Внаслідок такого процесу в загальному

шарі цукатів одночасно існуватимуть сухий шар матеріалу з температурою 100 °С, який акумулюватиме теплову енергію, і вологий шар матеріалу з температурою, нижчою за 100 °С.

Схема описаного механізму процесу тепломасообміну в монодисперсному шарі частинок з формою прямокутного паралелепіпеда зображена на рис. 3. На рис. 3. зображений стаціонарний шар з чотирьох частин, що відповідає умовам проведення експерименту в контейнері 1 (рис. 1).

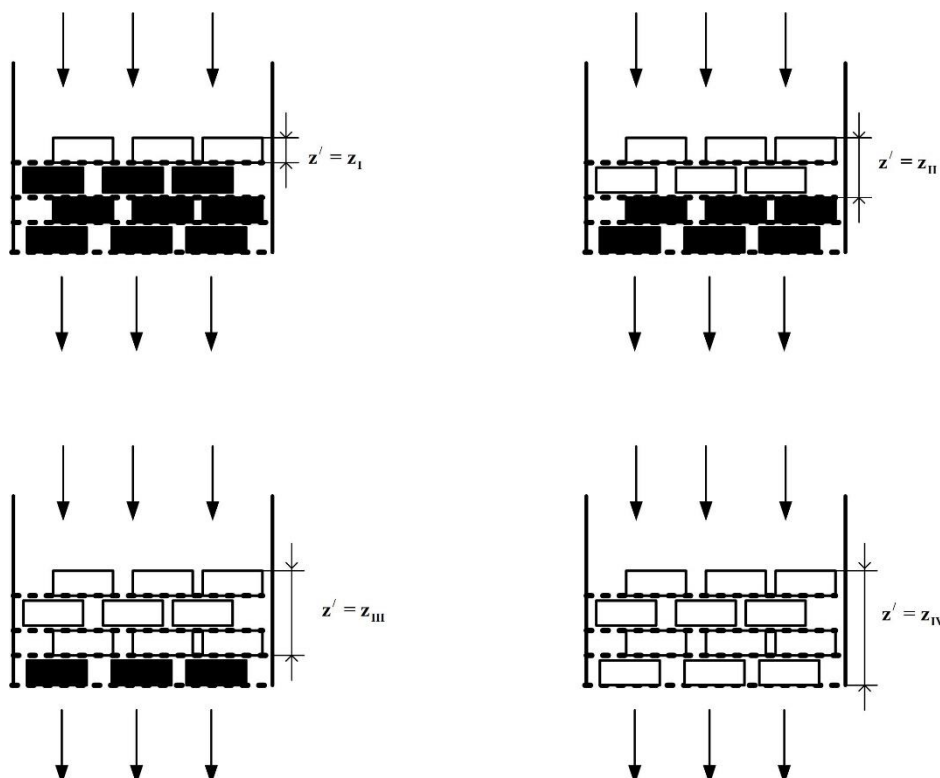


Fig. 3. The mechanism of the process of heat and mass transfer in a monodisperse layer of rectangular particles.  $z'$  – varying height, m;  $z_I$  – «short-length» layer height (0.03 m);  $z_{II}$ ,  $z_{III}$ ,  $z_{IV}$  – two, three, four «short-length» layer heights, m.

Рис. 3. Механізм процесу тепломасообміну в монодисперсному шарі частинок у формі прямокутного паралелепіпеда.  $z'$  – біжуча висота, м;  $z_I$  – висота «короткого» шару (0.03 м);  $z_{II}$ ,  $z_{III}$ ,  $z_{IV}$  – дві, три, чотири висоти короткого шару відповідно, м.

Шар невеликої висоти або «короткий» шар представляє ту зону, яка першою контактує з тепловим агентом [23]. Коли такий шар досягає рівноважної вологості, починають сушитися нижні шари.

Отже, з результатів експериментальних досліджень бачимо, що зона масообміну переміщується в напрямку руху теплового агента. Через певні проміжки часу з'являється шар матеріалу, який не приймає участі в тепломасообмінному процесі і зберігає в собі теплову енергію (рис. 3.).

Представимо розв'язання математичної задачі розподілу температур за висотою

монодисперсного шару, яке дозволяє визначити температуру теплоносія на висоті  $z$  в момент часу  $\tau'$ . Монодисперсний шар являє собою частинки цукатів з формою прямокутного паралелепіпеда. Поверхню частинок вважаємо симетричною пластиною.

Процес сушіння цукатів з гарбуза відбувається у другому періоді. У другому періоді сушіння монодисперсного шару поверхня часток вільна від вологи. Через шар профільтровується тепловий агент із об'ємною витратою  $V$  й початковою температурою  $t_n$ . Балансове рівняння для

одиниці висоти шару виглядає наступним чином:

$$V \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\lambda_s \cdot S \cdot 1 \cdot \frac{\varepsilon_s}{8 \cdot \delta^3} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta} \cdot 24 \cdot \delta^2, \quad (1)$$

де  $S \cdot 1 \cdot \varepsilon_s / (8 \cdot \delta^3)$  – кількість часток у шарі

висотою 1 м,

$S$  – загальна поверхня всіх частинок в шарі, м<sup>2</sup>.

У рівнянні (1) позначимо температуру теплового агента через  $t$ , а температуру частки –  $T$  (°C).

Представимо рівняння (1) у безрозмірних координатах:

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} = -3 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=1} \quad (2)$$

в якому

$$\omega = \frac{a \cdot \xi \cdot \varepsilon_s \cdot z}{\nu \cdot \delta^2} - \text{безрозмірна висота шару}$$

$$\varphi = \frac{x}{\delta} - \text{безрозмірний радіус,}$$

де  $a = \frac{\lambda_s}{\rho_s \cdot c_s}$  – коефіцієнт температуро-

провідності, м<sup>2</sup>/с;

$$\xi = \frac{\rho_s \cdot c_s}{\rho \cdot c} - \text{відношення об'ємної теплоти}$$

монодисперсного матеріалу й теплового агента;

$\lambda_s$  – коефіцієнт теплопровідності цукатів,

$$\frac{Вт}{м \cdot К};$$

$\rho$  – густина повітря, кг/м<sup>3</sup>;

$c$  – теплоємність повітря, Дж/кг · К;

$c_s$  – теплоємність цукатів, Дж/кг · К;

$\varepsilon_s$  – питомий об'єм часток цукатів у шарі,

$$\frac{м^3}{м^3_{шару}};$$

$z$  – висота шару цукатів, м;

$\delta$  – еквівалентний радіус (половина товщини частинки паралелепіпеду), м;

$8 \cdot \delta^3$  – еквівалентний об'єм паралелепіпеду, м<sup>3</sup>

$24 \cdot \delta^2$  – еквівалентна площа поверхні паралелепіпеду, м<sup>2</sup>

$x$  – біжучий еквівалентний радіус частинки, м;

$\nu$  – дійсна швидкість теплового агента, м/с.

У цьому випадку задача теплообміну формулюється у вигляді диференціального рівняння теплопровідності для симетричної пластини із граничними умовами:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (3)$$

$$T_{(x,\tau=0)} = T_0; \quad t_{(z=0, \tau)} = t_n, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{x=\delta} = \alpha \cdot \left[ t_{(\tau', z)} - T_{(\delta, \tau)} \right] \quad (6)$$

$\tau'$  – відлік часу від приходу теплового агента в пункт  $z$  буде визначатися з рівняння (7):

$$\tau' = \tau - \frac{z}{\nu} \quad (7)$$

Очевидно, що  $d\tau' = d\tau$ .

Доповнення системи (3–6) рівнянням (2) повністю описує теплообмін у монодисперсному шарі часток у формі прямокутного паралелепіпеду, а її розв'язок  $t = f(\tau', z)$  дозволяє визначити температуру

теплоносія на висоті  $z$  у момент часу  $\tau'$ .

Крім введених попередньо безрозмірних параметрів  $\xi$ ,  $\omega$  та  $\varphi$ , введемо нові

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2} - \text{число Фур'є та число Біо } Bi = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda_s}.$$

Із врахуванням рівнянь (1), (3–6) та введених безрозмірних параметрів отримаємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \\ T_{(\varphi, Fo=0)} = T_0; \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 \\ t_{(\omega=0, Fo)} = t_n \\ - \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=1} = Bi \left( t_{(\omega, Fo)} - T_{(1, Fo)} \right) \\ \frac{\partial t}{\partial \omega} + 3 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=1} = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

Розв'язання системи (8) проводиться операційним методом в залежності від умов перебігу процесу та властивостей сировини, що сушиться.

Розглянемо шар цукатів, що надійшов на сушіння, як окремо сухі цукати та волога в них. Тоді кількість теплової енергії сухих цукатів з температурою 80 °С буде величиною сталою протягом усього процесу.

Виходячи з описаного механізму сушіння рослинної сировини, можна вважати, що в шарі матеріалу рівномірно розподіляється джерело теплоти з постійною потужністю  $q$  [Вт/м<sup>3</sup>] (гарячий шар сухої рослинної сировини). Температурне поле при цьому описується рівнянням:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial (z')^2} + \frac{q}{c \cdot \rho} \quad (9)$$

Початкові й граничні умови при цьому мають вигляд:

якщо  $\tau = 0$ , то  $t = T$  та  $-z \leq z' \leq +z$

якщо  $-\lambda \frac{\partial t}{\partial z'} = \alpha (t - t_{m.m.})$ , то  $z' = +z$

$$\frac{\partial t}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = 0.$$

Для розв'язання такої задачі перетворимо рівняння (9) методом введення значення надлишкової температури:  $\vartheta = t - t_{m.m.}$ , яка являє собою різницю температури теплового агента й температури «мокрого» термометра. Надлишкова температура в процесі сушіння буде зростати від температури мокрого термометра до своєї початкової температури. Стационарний розподіл температур визначається за рівнянням:

$$t = t_{m.m.} + \frac{q \cdot z^2}{2\lambda} \cdot \left( 1 + \frac{2}{Bi} - \omega^2 \right) \quad (10)$$

Безрозмірні висоти шару  $\omega$  у випадку проведеного експерименту в контейнері 1, схема якого зображена на рис. 1, розраховуються наступним чином:

$$\omega_I = \frac{z_I}{z}; \quad \omega_{II} = \frac{z_{II}}{z}; \quad \omega_{III} = \frac{z_{III}}{z}; \quad \omega_{IV} = \frac{z_{IV}}{z},$$

або в загальному випадку  $\omega = \frac{z'}{z}$ .

Стационарне поле відповідає диференціальному рівнянню й граничним умовам. Беручи до уваги рівняння (10) і значення надлишкової температури, маємо:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial (z')^2}, \quad (11)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z'} = \alpha \vartheta \quad \text{при } z' = z,$$

$$\vartheta = \frac{q \cdot z^2}{2\lambda} \cdot \left( 1 + \frac{2}{Bi} - \omega^2 \right) \quad \text{при } \tau = 0,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } \tau \geq 0$$

Отримане рівняння (11) з граничними умовами розв'яжемо методом розділення змінних і одержимо загальне розрахункове рівняння для безрозмірної надлишкової температури:

$$\theta = \frac{\vartheta}{q \cdot z^2 / (2\lambda)} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos(n_i \cdot \omega) \cdot e^{-n_i^2 \cdot Fo} \quad (12)$$

Виходячи з рівняння (12) та результатів експериментів, наведених на рис. 2, безрозмірна температура для верхніх шарів

розраховуватиметься згідно із залежністю (13), а для нижніх шарів, згідно із залежністю (14):

$$\theta_{I-II} = \frac{t - t_{m.m.}}{T - t_{m.m.}} \quad (13)$$

$$\theta_{III-IV} = \frac{t - t_{m.m.}}{T - t_{m.m.}} - \frac{t - t_{m.m.}}{q \cdot z^2 / (2\lambda)} \quad (14)$$

Для математичного опису температурного поля у монодисперсному шарі скористаємось методом, який називається методом перетворення зображень процесів. В основі цього методу лежить математичний опис шару невеликої висоти експоненціальною залежністю.

У рівнянні (12) коефіцієнт  $C_i$  і власні числа  $n_i$  визначаються із трансцендентного рівняння [24]:

$$C_i = \frac{\int_0^1 (1 + 2/Bi - \omega^2) \cdot \cos(n_i \cdot \omega) dz'}{\int_0^1 \cos(n_i \cdot \omega) dz'}$$

Корені трансцендентного рівняння мають нескінчену множину чисел  $n_i$ . Такі числа залежать від порядкового номера  $i$  та числа  $Bi$ . За умов  $Bi \rightarrow \infty$

$$n_1 = \pi/2; n_2 = 3 \cdot \pi/2; n_3 = 5 \cdot \pi/2; \dots; n_i = (2i-1) \cdot \pi/2;$$

за умов  $Bi \rightarrow 0$

$$n_1 = 0; n_2 = \pi; n_3 = 2 \cdot \pi; \dots; n_i = (i-1) \cdot \pi;$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

У випадку проведеного експерименту

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda_s} = 0.37.$$

За таких невеликих значень  $Bi$  ряд з достатньою точністю може бути замінений першим його членом [24].

У нашому випадку  $\omega \leq 1$ , тоді температурне поле є експоненціальною функцією часу [25].

Вибираємо  $\omega_i$  для функції  $\theta_i(Fo)$  найменшим, щоб функцію можна було представити експоненціальною залежністю, як для «короткого» шару.

Також експоненціальною залежністю «короткого» шару, згідно з експериментальними даними (рис. 2), узагальнюється  $\omega_{II}$ , отже:

$$\theta_{I-II}(Fo) = 1 - e^{-Fo} \quad (15)$$

Тобто рівнянням (15) описуються шари  $\omega_I$  і  $\omega_{II}$

Перехід до другої довжини здійснюється відповідно до теорем перетворення [25]. Наприклад, при подвоєнні довжини  $\omega_{II}$  експоненціальна залежність матиме вигляд:

$$\theta_{III-IV}(Fo) = (1 - e^{-Fo}) \cdot (1 + Fo) \quad (16)$$

Згідно з експериментальними даними (рис. 2), рівняння (16) описуює шари  $\omega_{III}$  і  $\omega_{IV}$

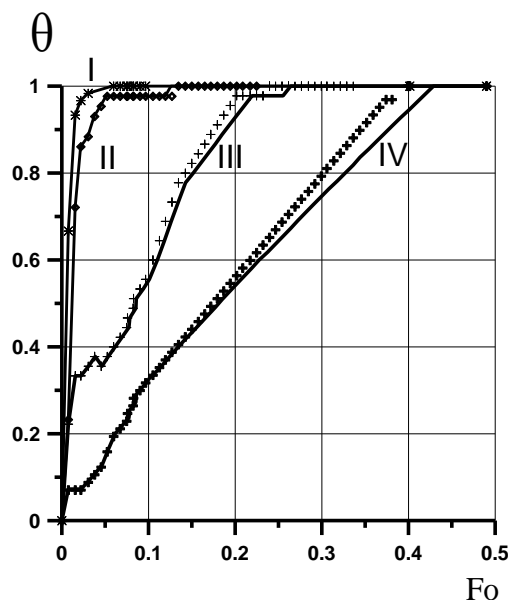


Fig. 4. Comparison of experimental data and data calculated by Eq. (1) (curves I - II) and Eq. (2) (curves III - IV).

Рис. 4. Зіставлення експериментальних даних і даних, розрахованих за формулою 1 (криві I - II) та за формулою 2 (криві III - IV).

На рис. 4 наведені результати розрахунків безрозмірної температури за висотою шару. Точками показані експериментальні дані. Для верхніх шарів безрозмірна температура розрахована за рівнянням (13), а для нижніх шарів - за рівнянням (14). Кривими I і II показані результати, розраховані згідно з рівнянням (15), а кривими III і IV - згідно з рівнянням (16). Рис. 4 вказує на адекватність розрахункової моделі, похибка між експериментальними й теоретичними даними не перевищує 7%. Адекватність запропонованої моделі встановлена для  $\omega \leq 1$ .

Збіжність розрахункових і експериментальних результатів дозволяє визначити розподіл температур за висотою монодисперсного шару, скориставшись різними співвідношеннями  $\omega$ .

## Висновки

З метою розроблення математичної моделі фільтраційного сушіння гарячого шару цукатів проведені експериментальні



дослідження змінення температури теплового агента в монодисперсному шарі. Обґрунтовано механізм фільтраційного сушіння цукатів як матеріалу, що поступає на сушіння з температурою, приблизно рівною температурі теплового агента та вносить в сушарку додаткову кількість теплової енергії.

Отримані результати досліджень та обґрунтований механізм сушіння дозволяють розробити та перевірити на адекватність математичну модель теплообмінного процесу в гарячому монодисперсному шарі частинок у формі прямокутного паралелепіпеда під час другого періоду фільтраційного сушіння. Розрахункова модель перевірена на адекватність, похибка між експериментальними й теоретичними даними не перевищує 7 %. Розроблена математична модель дозволяє з достатньою точністю прогнозувати перебіг фільтраційного сушіння матеріалу, що поступає на сушіння з температурою, приблизно рівною температурі теплового агента та вносить у сушарку додаткову кількість теплової енергії. Під час такого перебігу процесу теплота теплового агента майже повністю витрачається на випаровування вологи, що є позитивним фактором з точки зору економії енергії та зменшення часу сушіння.

## Bibliography

- [1] Modelling with simultaneous phase transfer chemisorption of hydrogen sulfide and carbon dioxide in the chemisorption apparatus. / Kaldybaeva, B. M., Khusanov, A. E., Dmitriev, E. A. [et al.] // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences. – 2016. – № 6(420) – P. 178–184.
- [2] Snezhkin, Y.F. Use of Combined Cogeneration–Thermal Pumping Plants for Municipal Heat Power Engineering and Heat Technologies / Y.F. Snezhkin, B.D. Bileka // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2020 – №93 – P. 376–383.
- [3] Resource and energy saving neural network-based control approach for continuous carbon steel pickling process / Bezsonov, O., Ilyunin, O., Kaldybaeva, B. [et al.] // Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems – 2019 – №7(2) – P. 275–292.
- [4] Дослідження змін температурних режимів процесу сушіння у виробництві цукатів з гарбуза / І.О. Гузьова, В. М. Атаманюк, Б.М. Микичак [та ін.] // Наукові праці ОНАХТ. – 2015. – № 47(2). – С.46 – 51.
- [5] Determination of drying kinetics and isotherms of orange bagasse / Leila Denise Fiorentin, Bruna Tozetto Menon, João Adriano Alves [et al.] // Acta Scientiarum: Technology. – 2010. – № 32(2). – С.147 – 152.
- [6] Isotermas de sorção do resíduo agroindustrial bagaço de laranja / Leila D. Fiorentin, Bruna T. Menon, Sueli T. D. de Barros [et al.] // Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental - Agriambi. – 2010. – № 14(6). – P.653-659.
- [7] Kinetic features of vibrating and filtration dewatering of fresh-peeled pumpkin seeds / 7. Tsurkan, O., Gerasimov, O., Polyevoda, Y. [et al.] // INMATEH – Agricultural Engineering. – 2017. – № 52(2). P.69 – 76
- [8] Determination of the kinetics of the process of pumpkin seeds vibrational convective drying / Kaletnik, G., Tsurkan, O., Rimar, T. [et al.] // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2020. – № 8. – P. 50–57.
- [9] Никитенко Н.И. Математическая модель и метод расчета динамики непрерывной сушки / Н.И. Никитенко, Ю.Ф. Снежкин, Н.Н. Сорокова // Наукові праці ОНАХТ. – 2011. № 39(2) – С. 10-16.
- [10] Никитенко Н.И. Математическое моделирование динамики обезвоживания в конвективных сушильных установках непрерывного действия. / Н.И. Никитенко, Ю.Ф. Снежкин, Н.Н. Сорокова // Наукові праці ОНАХТ. – 2013. – №43(1) – С. 26-32.
- [11] Нікітенко М.І. Математичне моделювання динаміки зневоднення в конвективних сушильних установках безперервної дії. / М.І. Нікітенко, Ю.Ф. Снежкін, Н.М. Сорокова // Вісник національного університету «Львівська політехніка». – 2013. – №761. – С. 265-269.
- [12] Korinchuk, D.N. Simulation of the High-Temperature Drying of a Composite Mixture in an Air Drier for Production of a Biocombustible / D.N. Korinchuk, Y.F. Snezhkin // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2018 – №91 – P.1155–1164.
- [13] Sorokovaya N.N. Mathematical Simulation and Optimization of the Continuous Drying of Thermolabile Materials / N.N. Sorokovaya, Y.F. Snezhkin, R.A. Shapar', R.Y. Sorokovoi // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2019 – №92(5) – P. 1180-1190
- [14] Modeling of internal diffusion mass transfer during filtration drying of capillary-porous material. / Gnativ, Z., Ivashchuk, O., Hrynychuk, Y. [et al.] // Mathematical Modeling and Computing. – 2020. – № 7(1) – P. 22–28.
- [15] Nikitenko N.I. Numerical method of the heat and mass transfer in different flows in a channel with penetrable walls / Nikitenko N.I., Snezhkin Yu.F., Sorokovaya N.N. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics – 2006 – №79(3) – P. 512–523.
- [16] Никитенко Н.И. Математическое моделирование динамики тепломассопереноса и фазовых превращений в адсорбере термического трансформатора цилиндрической формы / Н.И. Никитенко, Ю.Ф. Снежкин, Н.Н. Сорокова // Наукові праці ОНАХТ. – 2012. №41(2) – С. 191-197.
- [17] Hydrodynamics of cotton filtration drying. / Atamanyuk, V., Gnativ, Z., Kinzera, D. [et al.] // Chemistry & Chemical Technology. – 2020. – № 14(3) – P. 426–432.
- [18] Mykychak B. External heat-and-mass transfer during drying of packed birch peeled veneer / B. Mykychak, P. Biley, D. Kindzera // Chemistry and Chemical Technology. – 2013. – №7(2). – P.195-191.
- [19] Matkivska I. Basic regularities of the filtration drying of wheat grain / I. Matkivska, V. Atamanyuk, D. Symak // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2014. – № 5(71). P.14 – 18.
- [20] Matkivska I. Kinetics of Diffusion Mass Transfer during Filtration Drying of Grain Materials / I. Matkivska, Y. Gumnytskyi, V. Atamanyuk // Chemistry & Chemical Technology. – 2014 – № 8(3). – P.359 – 363.

- [21] Hosovsky R. Diffusive Mass Transfer during Drying of Grinded Sunflower Stalks / R. Hosovsky, D. Kindzera, V. Atamanyuk // *Chemistry & Chemical Technology* – 2016. – № 10(4). – P. 459 – 463.
- [22] Атаманюк В.М. Гідродинаміка і тепломасообмін під час фільтраційного сушіння дисперсних матеріалів: Дис...док. техн. наук: 05.17.08. – Л.: НУ «ЛП», 2007. – 320 с.
- [23] Atamanyuk V. Intensification of Drying Process During Activated Carbon Regeneration V. Atamanyuk, I. Huzova, Z. Gnativ // *Chemistry & Chemical Technology*. – 2018. – 12(2). – P. 263 – 271.
- [24] Атаманюк В.М. Математична модель процесу теплообміну під час другого періоду фільтраційного сушіння дисперсних матеріалів / В.М. Атаманюк, Я.М. Гумницький // *Східно-Європейський журнал передових технологій* – 2009. – 1/4(37). – P. 20–24.
- [25] Huzova I. Investigation of the energy-saving method during candied fruits filtration drying / I. Huzova, // *Periodica Polytechnica Chemical Engineering* – 2020 – №64(4), – P. 555–561
- [26] pumpkin seeds. *INMATEH – Agricultural Engineering*, 52(2), 69 – 76. [http://www.inmateh.eu/index\\_rom\\_Page2808.htm](http://www.inmateh.eu/index_rom_Page2808.htm)
- [8] Kaletnik, G., Tsurkan, O., Rimar, T., Stanislavchuk, O. (2020). Determination of the kinetics of the process of pumpkin seeds vibrational convective drying, 8, 50–57. <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2020.195203>
- [9] Nikitenko, N.I., Snezhkin, Ju.F., Sorokovaja, N.N. (2011). [Matematicheskaja model' i metod rascheta dinamiki nepreryvnoj sushki]. *Naukovi praci, ONAHT*, 47(2), 46–51. (in Russian)
- [10] Nikitenko, N.I., Snezhkin, Ju.F., Sorokovaja, N.N. (2013). [Matematicheskoe modelirovanie dinamiki obezvozhivaniya v konvektivnyh sushil'nyh ustanovkah nepreryvnogo dejstvija]. *Naukovi praci, ONAHT*, 43(1), 26 – 32. (in Russian)
- [11] Nikitenko, N.I., Snezhkin, Ju.F., Sorokova, N.M. (2013). [Matematychni modeljuvannja dynamiky znevodnennja v konvektivnyh sushil'nyh ustanovkah bezpererвної dii]. *Visnyk nacional'nogo universytetu «L'vivs'ka politehshka»*, 761, 265-269. (in Ukrainian)
- [12] Korinchuk, D.N., Snezhkin, Y.F. (2018). Simulation of the High-Temperature Drying of a Composite Mixture in an Air Drier for Production of a Biocombustible. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 91, 1155–1164. <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1844-6>
- [13] Sorokovaya, N.N., Snezhkin, Y.F., Shapar', R.A., Sorokovoi, R.Y. (2019). Mathematical Simulation and Optimization of the Continuous Drying of Thermolabile Materials. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 92(5), 1180-1190 <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02032-3>
- [14] Gnativ, Z.Y., Ivashchuk, O.S., Hrynychuk, Y.M., Reutskyi, V.V., Koval, I.Z., Vashkurak, Y.Z. (2020). Modeling of internal diffusion mass transfer during filtration drying of capillary-porous material. *Mathematical Modeling and Computing*, 7(1), 22–28 <https://doi.org/10.23939/mmc2020.01.022>
- [15] Nikitenko, N.I., Snezhkin, Yu.F., Sorokovaya, N.N. (2006). Numerical method of the heat and mass transfer in different flows in a channel with penetrable walls. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 79(3), 512–523. <https://doi.org/10.1007/s10891-006-0129-7>
- [16] Nikitenko, N.I., Snezhkin, Ju.F., Sorokovaja, N.N. (2012). [Matematicheskoe modelirovanie dinamiki teplomassoperenosia i fazovyh prevrashhenij v adsorbere termicheskogo transformatora cilindricheskoj formy]. *Naukovi praci, ONAHT*, 41(2), 191 – 197. (in Russian)
- [17] Atamanyuk, V., Gnativ, Z., Kinzera, D., Janabayev, D., Khusanov, A., Kaldybaeva, B. (2020). *Hydrodynamics of cotton filtration drying*, 14(3), 426–432. <https://doi.org/10.23939/chcht14.03.426>
- [18] Mykychak, B., Biley, P., Kindzera, D. (2013). External heat-and-mass transfer during drying of packed birch peeled veneer. *Chemistry and Chemical Technology*, 7(2), 191–195. <https://doi.org/10.23939/chcht07.02.191>
- [19] Matkivska, I., Atamanyuk, V., Symak, D. (2014). Basic regularities of the filtration drying of wheat grain. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(71), 14 – 18. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.27975>
- [20] Matkivska, I., Gumnytskyi, Y., Atamanyuk V. (2014). Kinetics of Diffusion Mass Transfer during Filtration

## References

- Drying of Grain Materials. *Chemistry & Chemical Technology*, 8(3), pp. 359 – 363.  
<https://doi.org/10.23939/chcht08.03.359>
- [21] Hosovsky, R., Kindzera, D., Atamanyuk, V. (2016). Diffusive Mass Transfer during Drying of Grinded Sunflower Stalks. *Chemistry & Chemical Technology*, 10(4), 459–463.  
<https://doi.org/10.23939/chcht10.04.459>
- [22] Atamanjuk, V. M. (2007). [Gidrodynamika i teplomasoobmin pid chas fil'tracijnogo sushinnja dyspersnyh materialiv] Dys...dok. tehn. Nauk, L.: NU «LP». (in Ukrainian)
- [23] Atamanyuk, V., Huzova, I., Gnativ, Z. (2018). Intensification of Drying Process During Activated Carbon Regeneration. *Chemistry & Chemical Technology*, 12(2), 263–271.  
<https://doi.org/10.23939/chcht12.02.263>
- [24] Atamanjuk, V.M. Gumnyc'kyj, Ja. M. (2009). [Matematychna model' procesu teploobminu pid chas drugogo periodu fil'tracijnogo sushinnja dyspersnyh materialiv]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1/4(37), 20 – 24. (in Ukrainian)
- [25] Huzova, I. (2020). Investigation of the energy-saving method during candied fruits filtration drying. *Periodica Polytechnica Chemical Engineering*, 64(4), 555–561.  
<https://doi.org/10.3311/PPch.15107>